CHƯƠNG V

CHUỖI TIỀN TỆ (ANNUITIES)

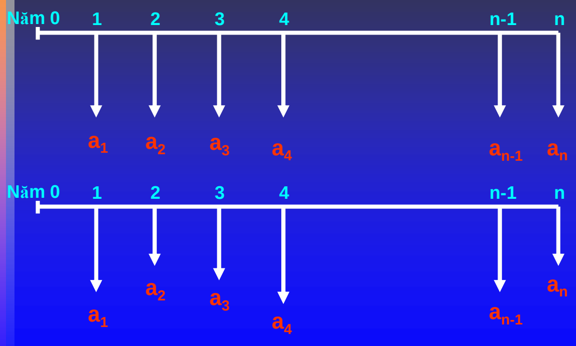
I.TỔNG QUAN

- Chuỗi tiền tệ là một loạt các khoản tiền phát sinh định kỳ theo những khoảng cách thời gian bằng nhau.
- Một chuỗi tiền tệ hình thành khi đã xác định được:
  - Số kỳ phát sinh (số lượng kỳ khoản) : n
  - Số tiền phát sinh mỗi kỳ (thu hoặc chi): a
  - Lãi suất tính cho mỗi kỳ : i
  - Độ dài của kỳ: khoảng cách thời gian cố định giữa 2 kỳ trả (có thể là năm, quý, tháng…)

I.TỔNG QUAN

- Phân loại chuỗi tiền tệ:
  - Theo số tiền phát sinh mỗi kỳ:
  - Chuỗi tiền tệ cố định *(constant annuities)*: số tiền phát sinh trong mỗi kỳ bằng nhau.
  - Chuỗi tiền tệ biến đổi *(variable annuities)*: số tiền phát sinh trong mỗi kỳ không bằng nhau.

I.TỔNG QUAN

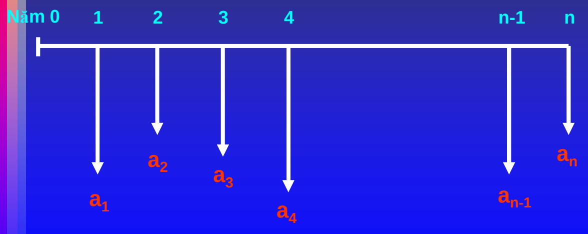


I.TỔNG QUAN

- Phân loại chuỗi tiền tệ:
  - Theo số kỳ khoản phát sinh:
    - Chuỗi tiền tệ có thời hạn: số kỳ phát sinh là hữu hạn.
    - Chuỗi tiền tệ không kỳ hạn: số kỳ phát sinh là vô hạn.
  - Theo phương thức phát sinh:
    - Chuỗi phát sinh đầu kỳ: số tiền phát sinh ở đầu mỗi kỳ.
    - Chuỗi phát sinh cuối kỳ: số tiền phát sinh ở cuối mỗi kỳ.

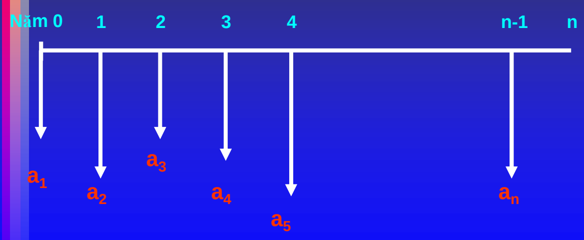
I.TỔNG QUAN

- **Chuỗi tiền tệ phát sinh cuối kỳ**



I.TỔNG QUAN

- **Chuỗi tiền tệ phát sinh đầu kỳ**

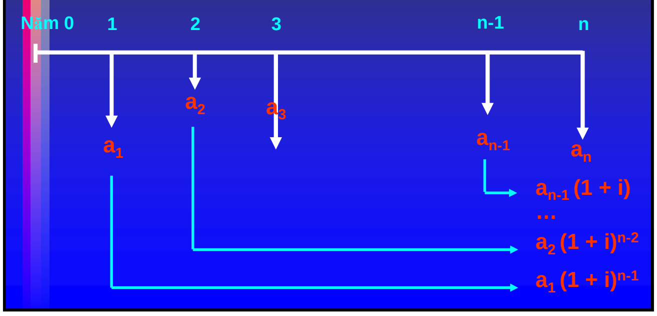


II. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ

- Giá trị tương lai (definitive value): là tổng giá trị tương lai của các kỳ khoản được xác định vào thời điểm cuối cùng của chuỗi tiền tệ (cuối kỳ thứ n).
- Hiện giá (giá trị hiện tại – present value): là tổng hiện giá của các kỳ khoản được xác định ở thời điểm gốc (thời điểm 0)

II. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ

- **2.1 Giá trị tương lai của một chuỗi tiền tệ phát sinh cuối kỳ.**



II. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ

- Vậy giá trị tương lai (giá trị cuối) của chuỗi tiền tệ được biểu diễn như sau:

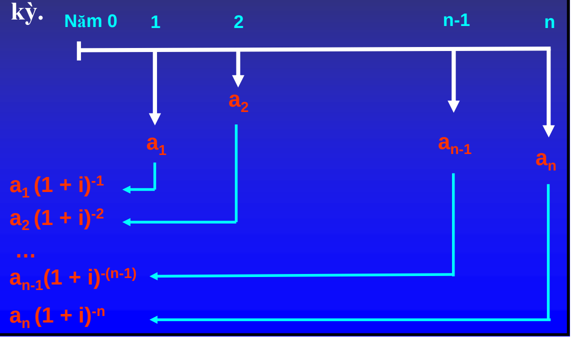
$V_n = a_1 (1+i)^{n-1} + a_2 (1+i)^{n-2} + a_3 (1+i)^{n-3} + \ldots + a_n$

- Nếu ta gọi:
  - a_k : giá trị của kỳ khoản thứ k
  - i : lãi suất.
  - n : số kỳ phát sinh.

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{n-k}$$

II. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ

- **2.1 Hiện giá của một chuỗi tiền tệ phát sinh cuối kỳ.**



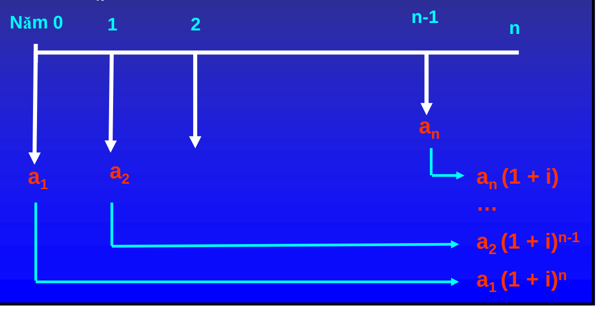
II. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ

$V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + a_3(1+i)^{-3} + \ldots + a_n(1+i)^{-n}$

$$V_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{-k}$$

II. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ

2.2 Giá trị tương lai của một chuỗi tiền tệ phát sinh đầu kỳ (V_n')



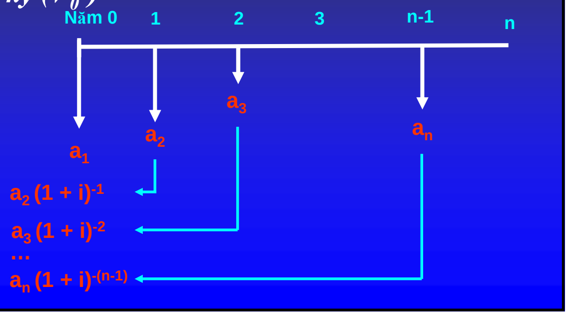
II. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ

$$V_n' = a_1(1+i)^n + a_2(1+i)^{n-1} + \ldots + a_n(1+i)$$

$$V_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{n-k+1} = V_n (1+i)$$

II. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ

- ***Hiện giá của một chuỗi tiền tệ phát sinh đầu kỳ (V_0')***



II. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ

$V_0' = a_1 + a_2(1+i)^{-1} + a_3(1+i)^{-2} + \ldots + a_n(1+i)^{-(n-1)}$

$$V_0' = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{-k+1} = V_0(1+i)$$

III. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ ĐỀU

3.1 Giá trị tương lai và hiện giá của một chuỗi tiền tệ đều phát sinh cuối kỳ

3.2 Giá trị tương lai và hiện giá của chuỗi tiền tệ cố định phát sinh đầu kỳ

III. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ ĐỀU

- ***Giá trị tương lai của một chuỗi tiền tệ đều phát sinh cuối kỳ***

  Chuỗi tiền tệ đều, giá trị của tất cả các kỳ khoản đều bằng nhau:

  $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_{n-1} = a_n$

III. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ ĐỀU

$$V_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + \ldots + a(1+i) + a$$

$$\Rightarrow V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

III. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ ĐỀU

- ***Hiện giá của 1 chuỗi tiền tệ đều phát sinh cuối kỳ***

$$V_0 = a(1+i)^{-n} + a(1+i)^{-(n-1)} + \ldots + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-1}$$

$$V_o = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

III. GIÁ TRỊ TƯƠNG LAI VÀ HIỆN GIÁ CỦA MỘT CHUỖI TIỀN TỆ ĐỀU

- ***Hiện giá của một chuỗi tiền tệ cố định phát sinh vĩnh viễn ($n \to \infty$)***

$$\underset{n\to+\infty}{V_o} = \frac{a}{i}$$

Hệ quả từ công thức tính V_n của chuỗi tiền tệ đều

- Tính kỳ khoản a

$$\Rightarrow a = \frac{V_n i}{(1+i)^n - 1}$$

- Tính lãi suất i *(tra bảng tài chính 3 hay áp dụng công thức nội suy)*

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{V_n}{a}$$

Hệ quả từ công thức tính V_n của chuỗi tiền tệ đều

- Tính số lượng kỳ khoản n

$$n = \frac{\log(\frac{V_n i}{a} + 1)}{\log(1+i)}$$

Trong trường hợp n không phải là số nguyên ta phải biện luận thêm

Hệ quả từ công thức tính V_n của chuỗi tiền tệ đều

Gọi

- n_1 là số nguyên nhỏ hơn gần nhất với n
- n_2 là số nguyên lớn hơn gần nhất với n

Hệ quả từ công thức tính V_n của chuỗi tiền tệ đều

- **CÁCH 1: chọn n = n_1** nghĩa là quy tròn n sang số nguyên nhỏ hơn gần nhất. Lúc đó $V_{n1} < V_n$.
  Để đạt được giá trị V_n sau n_1 kỳ khoản, chúng ta phải thêm vào kỳ khoản cuối cùng số còn thiếu ($V_n - V_{n1}$) nên:

$$a_{n1} = a + (V_n - V_{n1})$$

Hệ quả từ công thức tính V_n của chuỗi tiền tệ đều

- **CÁCH 2: chọn n = n_2**, nghĩa là quy tròn sang số nguyên lớn hơn gần nhất. Lúc đó $V_{n2} > V_n$.
  Để đạt được giá trị V_n sau n_2 kỳ khoản, chúng ta phải giảm bớt ở kỳ khoản cuối cùng số còn thừa ($V_{n2} - V_n$) nên

$$a_{n2} = a - (V_{n2} - V_n)$$

Hệ quả từ công thức tính V_n của chuỗi tiền tệ đều

- **CÁCH 3: chọn n = n_1** và thay vì tăng thêm 1 khoản ở kỳ khoản cuối cùng, ta có thể để V_{n1} trên tài khoản thêm một thời gian x để V_{n1} tiếp tục phát sinh lợi tức (kép) cho đến khi đạt được giá trị V_n

Hệ quả từ công thức tính V_0 của chuỗi tiền tệ đều

- Tính giá trị kỳ khoản a

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

- Tính giá trị của lãi suất i

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{V_0}{a}$$

Hệ quả từ công thức tính V_0 của chuỗi tiền tệ đều

- Tính số kỳ khoản n

$$\Rightarrow n = \frac{\log\left[\dfrac{1}{1-\dfrac{V_0 i}{a}}\right]}{\log(1+i)}$$

- Trường hợp n không phải là số nguyên, ta đặt
  - n_1: là số nguyên nhỏ hơn gần nhất với n
  - n_2: là số nguyên lớn hơn gần nhất với n
- Có 2 cách để quy tròn số n

Hệ quả từ công thức tính V_0 của chuỗi tiền tệ đều

- **CÁCH 1: chọn n = n_1**, nghĩa là quy tròn n sang số nguyên nhỏ hơn gần nhất. Lúc đó $V_{01} < V_0$ Để đạt được hiện giá V_0, phải tăng thêm vào kỳ khoản cuối cùng n_1 một khoản x.

  Vì $V_0 = V_{01} + x(1+i)^{-n1}$

$$\Rightarrow x = (V_o - V_{o1})(1+i)^{n1}$$

Hệ quả từ công thức tính V_0 của chuỗi tiền tệ đều

- **CÁCH 2: chọn n = n_2,** nghĩa là quy tròn n sang số nguyên lớn hơn gần nhất, lúc đó $V_{02} > V_0$. Để đạt được hiện giá V_0, phải giảm bớt ở kỳ khoản cuối cùng n_2 một khoản x

  Vì $V_0 = V_{01} - x(1+i)^{-n2}$

$$\Rightarrow x = (V_{o1} - V_o)(1+i)^{n2}$$

3.2 Giá trị tương lai và hiện giá của chuỗi tiền tệ cố định phát sinh đầu kỳ:

- ***Giá trị tương lai của chuỗi tiền tệ cố định phát sinh đầu kỳ (V_n')***

  Từ công thức $V_n' = V_n (1+i)$

$$\Rightarrow V_n' = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

3.2 Giá trị tương lai và hiện giá của chuỗi tiền tệ cố định phát sinh đầu kỳ:

- ***Hiện giá của chuỗi tiền tệ cố định phát sinh đầu kỳ (V_o')***

  Từ công thức $V_0' = V_0 (1+i)$

$$\Rightarrow V_0' = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$$

IV. CHUỖI TIỀN TỆ BIẾN ĐỔI CÓ QUY LUẬT:

4.1 Chuỗi tiền tệ biến đổi theo cấp số cộng

4.2 Chuỗi tiền tệ biến đổi theo cấp số nhân

4.1 Chuỗi tiền tệ biến đổi theo cấp số cộng (phát sinh cuối kỳ):

- ***Giá trị tương lai của 1 chuỗi tiền tệ biến đổi theo cấp số cộng.***

  Xét 1 chuỗi tiền tệ biến đổi theo cấp số cộng có giá trị của kỳ khoản đầu tiên là a_1=a, công sai là r và lãi suất i.

  $a_2 = a_1 + r = a + r$

  $a_3 = a_2 + r = a + 2r$

  …

  $a_n = a_{n-1} + r = a + (n-1)r$

4.1 Chuỗi tiền tệ biến đổi theo cấp số cộng (phát sinh cuối kỳ):

$$V_n = \left[\left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}\right]$$

$$V_o = \left(a + \frac{r}{i} + nr\right)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{nr}{i}$$

4.2 Chuỗi tiền tệ biến đổi theo cấp số nhân
(phát sinh cuối kỳ)

- ***Giá trị tương lai của một chuỗi tiền tệ biến đổi theo cấp số nhân:***

  Xét một chuỗi tiền tệ biến đổi theo cấp số nhân có giá trị của kỳ khoản đầu tiên là a_1=a, công bội là q và lãi suất i

  $a_2 = a_1q = a\,q$

  $a_3 = a_2q = a\,q^2$

  $a_4 = a_3q = a\,q^3$

  …

  $a_n = a_{n-1}q = a\,q^{n-1}$

4.2 Chuỗi tiền tệ biến đổi theo cấp số nhân
(phát sinh cuối kỳ)

$$V_n = a\frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)} \qquad V_o = a\frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)}(1+i)^{-n}$$

- Đặc biệt q= (1+ i)

$$V_n = na(1+i)^{n-1} \qquad V_o = na(1+i)^{-1}$$